

Quiz 1

Τοιχογράμης
Εμμανουήλ

A.E.M 433

Λύσεις στα προβλήματα

① Το A

② Έχουμε $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x^2(x-3) + (x-3) \Rightarrow (x-3)(x^2+1) = 0$

Άρα $x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=3}$. Μια από τις ρίζες της εξίσωσης είναι η $x=3$
Άρα είναι το A

③ Έχουμε το σύστημα

1) $25a + b + c = 0$

2) $64a + 8b + c = 155$

3) $144a + 12b + c = 155$

Αφαιρώντας ενν 1) από ενν 2) έχουμε: $64a + 8b + c = 155$

"-, $25a + b + c = 0$

$39a + 7b = 155$ ④

Αφαιρώντας ενν 1) από ενν 3) έχουμε: $144a + 12b + c = 155$

"-, $25a + b + c = 0$

$119a + 11b = 155$ ⑤

Έχουμε τώρα τις ④ & ⑤. Από ενν ④ έχουμε: $39a = 155 - 7b \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \frac{155 - 7b}{39}$ ⑥

Βάζοντας ενν ⑥ ενν ⑤ έχουμε $119 \frac{155 - 7b}{39} + 11b = 155 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{18445 - 833b}{39} + 11b = 155 \Rightarrow 472,94 - 21,35b + 11b = 155$

$\Rightarrow -10,35b = -317,94 \Rightarrow b = 30,71$

Από ενν ⑥ έχουμε: $a = \frac{155 - 7 \cdot 30,71}{39} = \frac{155 - 214,97}{39} = \frac{-59,97}{39} =$

και από ενν ① $c = -25a - b = 30,95 - 30,71 = 7,54$

Είναι το A

(4) Έχουμε: $\int_0^{\pi/4} 2 \cos 2x dx = \int_0^{\pi/4} 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 2x d(2x) = \int_0^{\pi/4} \cos 2x d(2x) =$
 $= \left[\sin 2x \right]_0^{\pi/4} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$ Είναι το B

(5) Έχουμε $y = 2 \sin(3x)$

Διαφορίω και τα 2 μέλη (Διαφορικό συνάρτησης: $y = f(x)$
 είναι $dy = f'(x) dx$)

Άρα έχουμε: $y = 2 \sin(3x) \Rightarrow dy = 2 \cos(3x) \cdot (3x)' dx \Rightarrow$
 $\Rightarrow dy = 2 \cdot 3 \cos(3x) dx \Rightarrow dy = 6 \cos(3x) dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6 \cos(3x)$

Για $\frac{dy}{dx}(1,0)$ έχουμε $\frac{dy}{dx}(1,0) = 6 \cos(3(1,0)) =$
 $= 6 \cos 3 = 6(-0,9899) = -5,9399$

Είναι το A

(6) Έχουμε $f(x) = \sin(2x)$

$f'(x) = 2 \cos 2x$

$f''(x) = -4 \sin 2x$

$f^{(3)}(x) = -8 \cos 2x$

$f^{(4)}(x) = 16 \sin 2x$

$f^{(5)}(x) = 32 \cos 2x$

Το ανάπτυγμα της $\sin(2x)$ κατά σειρά MacLaurin

Θα είναι:

$f(x) = \sin(2x) = f(0) + \frac{x-0}{1!} f'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{(x-0)^5}{5!} f^{(5)}(0) + \dots$

$= 2x - \frac{8x^3}{6} + \frac{32x^5}{120} + \dots =$

$\boxed{5! = 120}$

$= 2x - 1,33x^3 + 0,266667 + \dots$

Άρα ο συντελεστής είναι το 0,266667 Είναι το Δ

7. Το ανάπτυγμα κατά σειρά Taylor μιας συνάρτησης δίνεται από την σχέση:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Για $x=7$ και $x_0=3$ θα έχουμε:

$$f(7) = f(3) + f'(3) \cdot 4 + \frac{f''(3)}{2!} \cdot 4^2 + \frac{f'''(3)}{3!} \cdot 4^3 + \dots$$

Αφού όλες οι παράγωγοι υψηλότερης τάξης είναι μηδέν για $x_0=3$ (σύμφωνα με εκφώνηση) θα έχουμε:

$$f(7) = f(3) + f'(3) \cdot 4 + \frac{f''(3)}{2!} \cdot 4^2$$

$$= 6 + 8 \cdot 4 + \frac{11}{2} \cdot 16 = 6 + 32 + \frac{176}{2} = 88 + 6 + 32 = 126$$

Γίνεται το 7

8. Το ανάπτυγμα κατά σειρά Taylor δίνεται γενικά από:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \dots$$

Έχουμε $y(0)=3$ $y(0,2)$ $\left. \begin{matrix} \downarrow \\ x_0=0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x-x_0 = 0,2-0=0,2$

Για $y(0,2) = y(0) + y'(0) \cdot 0,2 + \frac{y''(0)}{2!} \cdot 0,2^2$ $\Rightarrow$ έχουμε να κάνουμε με πεπερασμένες υποθέσεις

$$\Rightarrow y(0,2) = y(0) + y'(0) \cdot 0,2 + y''(0) \cdot 0,02$$

Από εκφώνηση έχουμε: $\frac{dy}{dx} = y^3 + 2$ που σημαίνει $y'(x) = y^3 + 2$ ①

Άρα $y'(x) = y^3 + 2$ ② $\Rightarrow y'(0) = 3^3 + 2 = 29$ και ακόμη $y(0)=3$ ③

$$y''(x) = (y'(x))' = 3y^2 y' = 3y^2 \frac{dy}{dx} = 3y^2 (y^3 + 2)$$

$$\lambda \rho a \quad y''(0) = 3(3)^2 (3+9) = 3 \cdot 9 \cdot 29 = 783$$

$$\lambda \rho a \quad y(0,9) = 3 + 29 \cdot 0,9 + 783 \cdot 0,09 = 3 + 15,66 + 5,8 = 24,46 \quad \text{Είναι το } \Gamma$$

9. Γνωρίζουμε ότι: $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$$\begin{aligned} \text{και} \quad \cos 2x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2^2)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

$$\lambda \rho a \quad \cos(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} 4^n \quad \text{Είναι το } B$$

10. Έχουμε: $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}}_{f(t)} dt$

Θα έχουμε $f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$. Σύμφωνα από το 0 θα είναι

$$f(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-0^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot 1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

Επίσης, $f'(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} (-2t)$ με $f'(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-0^2} (-2 \cdot 0) =$

$$f''(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-t^2} (-2t) \right)' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[e^{-t^2} (-2t)' + e^{-t^2} (-2) \right] = 0$$

$$\lambda \rho a \quad f''(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} [0 \cdot (-2)] = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}$$

Οι 3 πρώτοι όροι της σειράς Taylor σύμφωνα από το μηδέν θα είναι:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 \Rightarrow$$

$x_0 = 0$

$$\Rightarrow f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} + 0 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{x^2}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^2$$

Άρα :

$$\operatorname{erf}(x) = \int_0^x \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^2 \right) dt = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{\pi}} dt - \int_0^x \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^2 dt =$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x t^2 dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} [t]_0^x - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{x^3}{3}$$

$$\text{και } \operatorname{erf}(2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} 2 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{2^3}{3} = -0,75885 \quad \text{Είναι το Α}$$

11

Έχουμε $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad 0 \leq c \leq x$

Για $x=0,1$ $R_n(0,1) = \frac{(0,1)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$

Όπως ξέρουμε ότι $|\sin x| \leq 1 \Rightarrow \left| f^{(n+1)}(c) \right| \leq 1$. Το κλάσμα

$$\frac{(0,1)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ πάντα θετικό. Έτσι έχουμε } R_n(0,1) \leq \frac{(0,1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 1$$

$$= \frac{(0,1)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \textcircled{1}$$

Θέλουμε όπως $R_n(0,1) < 10^{-6} \quad \textcircled{1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(0,1)^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-6} \quad \text{ισχύει για } n \geq 4.$$

Όπως το ανάπτυγμα Mac-Laurin σειράς για $\sin x$ περιέχει
περισσότερους όρους δηλαδή $n \geq 5$ ή αλλιώς αντιστοιχεί είναι το 5